



UNIwersytet MIKOŁAJA KOPERNIKA
w TORUNIU
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

MICHAŁ JAŚTAK

Twierdzenie Van der Corputa
w grupach topologicznych zwartych

Praca magisterska napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Mariusza Lemańczyka

TORUŃ 1997

Spis treści

Wstęp	3
1 Równomierny rozkład w grupach topologicznych	4
1.1 Charaktery grup topologicznych	8
1.2 Grupy ilorazowe	11
1.3 Izomorfizmy topologiczne	13
2 Teoria dualności	21
2.1 Związki między zwartością i dyskretnością w grupach dualnych . .	22
2.2 Twierdzenie Pontriagina o dualności	25
2.3 Anihilatory	25
3 Własności ciągów równomiernie rozłożonych	32
4 Uogólnione twierdzenie Van der Corputa	38
4.1 Twierdzenie Weyla	43
Bibliografia	46

Wstęp

Celem pracy jest uogólnienie klasycznego twierdzenia Van der Corputa dotyczącego równomiernego rozkładu ciągów na okręgu, na dowolną zwartą grupę abelową. Jako zastosowanie otrzymuje się twierdzenie o równomiernym rozkładzie ciągów (b_n) postaci

$$b_n = a_m^{n^m} \cdot a_{m-1}^{n^{m-1}} \cdot \dots \cdot a_1^n \cdot a_0, \quad n \geq 1$$

(gdzie $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathcal{G}$) w grupach, które są dodatkowo spójne i monotetyczne, będące naturalnym uogólnieniem twierdzenia Weyla o równomiernym rozkładzie ciągów części ułamkowych wielomianów.

Rozdziały 1 i 2 wprowadzają czytelnika w teorię grup topologicznych. Wiele uwagi poświęca się w rozdziale 2 teorii dualności Pontriagina dla grup abelowych lokalnie zwartych.

Rozdział 3 prezentuje elementarne własności ciągów równomiernie rozłożonych.

W rozdziale 4 dowodzimy twierdzenia Van der Corputa w dowolnej zwartej grupie abelowej.

Praca niniejsza oparta jest na książce [4], a w szczególności na części IV wspomnianej książki.

U czytelnika zakłada się znajomość teorii miary i całki w zakresie [3], w szczególności istnienia miary Haara [3] na grupach lokalnie zwartych. Wykorzystuje się również pewne klasyczne twierdzenia topologii, które można znaleźć np. w [1].

Rozdział 1

Równomierny rozkład w grupach topologicznych

W rozdziale tym przedstawimy podstawowe pojęcia związane z równomiernym rozkładem ciągów w grupach topologicznych. Jako standardowe oznaczenia na zbiory liczb naturalnych, całkowitych, rzeczywistych i zespolonych przyjmujemy odpowiednio $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Definicja 1.1

Grupę $\mathcal{G}$ nazywamy *topologiczną*, jeśli w zbiorze $\mathcal{G}$ określona jest pewna topologia, ze względu na którą $\mathcal{G}$ jest $\mathcal{T}_1$ -przestrzenią i zachodzą następujące warunki:

1. $f(x, y) = x \cdot y$ jest przekształceniem ciągłym $f : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$,
(na $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ rozpatrujemy topologię produktową)
2. $m(x) = x^{-1}$ jest przekształceniem ciągłym $m : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Przykład 1.1

Grupa $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$ liczb zespolonych o module 1 z mnożeniem jako działaniem grupowym i topologią wprowadzoną metryką

$$d(x, y) = |x - y|$$

jest grupą topologiczną.

Uwaga 1.1

Jedynkę grupy topologicznej $\mathcal{G}$ oznaczać będziemy przez $e_{\mathcal{G}}$.

Uwaga 1.2

Z ciągłości mnożenia wynika, że jeśli $\mathcal{U}$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$, to również zbiór $x \cdot \mathcal{U} = \{x \cdot u ; u \in \mathcal{U}\}$ jest zbiorem otwartym.

Uwaga 1.3

Jeśli $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ są otoczeniami jedynek w $\mathcal{G}$ oraz $\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^{-1} \subset \mathcal{U}$, to $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$ ($\mathcal{V}^{-1} = \{u^{-1} ; u \in \mathcal{V}\}$). Rzeczywiście, jeśli $x \in \overline{\mathcal{V}}$, to $x \cdot \mathcal{V} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, więc $x \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^{-1}$.

Uwaga 1.4

Biorąc pod uwagę fakt, że działania grupowe są ciągłe, $e_{\mathcal{G}} \cdot e_{\mathcal{G}} = e_{\mathcal{G}}$ oraz uwagę 1.3, wnioskujemy, że dla dowolnego otoczenia $\mathcal{U}$ jedynek w $\mathcal{G}$ istnieje takie otoczenie $\mathcal{W}$ jedynek w $\mathcal{G}$, że $\overline{\mathcal{W}} \cdot \overline{\mathcal{W}}^{-1} \subset \mathcal{U}$.

Uwaga 1.5

Jeśli $x \neq e_{\mathcal{G}}$, to z powyższej uwagi kładąc $\mathcal{U} = \mathcal{G} \setminus \{x\}$ znajdujemy takie otoczenie $\mathcal{V}$ jedynek grupy $\mathcal{G}$, że $\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^{-1} \subset \mathcal{U}$. Wówczas $\mathcal{V} \cap x \cdot \mathcal{V} = \emptyset$. Stąd wynika, że każda grupa topologiczna jest przestrzenią Hausdorffa.

Definicja 1.2

Pokryciem grupy topologicznej $\mathcal{G}$ nazywać będziemy dowolną rodzinę zbiorów $\{\mathcal{S}_i ; i \in \mathcal{I}\}$ spełniającą warunek

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_i = \mathcal{G}.$$

Grupę topologiczną $\mathcal{G}$ nazywać będziemy *zwartą*, gdy z dowolnego pokrycia tej grupy zbiorami otwartymi wybrać możemy podpokrycie skończone.

Grupę topologiczną $\mathcal{G}$ nazywać będziemy *lokalnie zwartą*, gdy dla każdego $g \in \mathcal{G}$ istnieje takie otoczenie $\mathcal{U}$ punktu g , że $\overline{\mathcal{U}}$ z topologią indukowaną z $\mathcal{G}$ jest przestrzenią zwartą.

Oczywiście każda grupa zwarta jest lokalnie zwarta (za $\mathcal{U}$ wystarczy wziąć $\mathcal{G}$).

Przykład 1.2

Oznaczmy przez $\mathcal{C}_m, m \geq 1$ grupę cykliczną rzędu m generowaną przez $a \in \mathcal{C}_m$. Jest ona oczywiście grupą abelową. W topologii dyskretnej $\mathcal{C}_m$ staje się grupą topologiczną zwartą.

Uwaga 1.6

W pracy tej zajmować się będziemy wyłącznie grupami topologicznymi, abelowymi, zwartymi, od tej chwili jako domyślne przyjmujemy założenia zwartości i przemienności każdej grupy topologicznej.

Niektóre z własności uogólnimy również na grupy lokalnie zwarte, ale będzie to wyraźnie podkreślone w założeniach.

Definicja 1.3

σ -algebrą zbiorów borelowskich nazywamy σ -algebrę generowaną przez zbiory otwarte. Miarę określoną na takiej algebrze nazywamy *miarą borelowską*.

Definicja 1.4

Miarą *Haara* μ określoną na grupie topologicznej $\mathcal{G}$ nazwiemy borelowską miarę spełniającą następujące warunki:

1. $\mu(\mathcal{G}) = 1$,
2. $\mu(\mathcal{U}) > 0$ dla dowolnego otwartego i niepustego zbioru $\mathcal{U}$,
3. Dla dowolnego borelowskiego zbioru $\mathcal{U}$ i dowolnego $x \in \mathcal{G}$

$$\mu(x \cdot \mathcal{U}) = \mu(\mathcal{U} \cdot x) = \mu(\mathcal{U}).$$

Uwaga 1.7

Na każdej grupie zwartej, abelowej istnieje miara Haara; co więcej miara ta jest jedyna ([3], rozdział 11).

Definicja 1.5

Mówimy, że ciąg $(x_n) \subset \mathcal{G}$ jest *równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$* , gdy równość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_{\mathcal{G}} f d\mu \quad (1.1)$$

jest spełniona dla wszystkich $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$, tzn. dla wszystkich funkcji ciągłych określonych na $\mathcal{G}$.

Mocniejszym pojęciem jest doskonały rozkład ciągu.

Definicja 1.6

Mówimy, że ciąg $(x_n) \subset \mathcal{G}$ jest *doskonale rozłożony w $\mathcal{G}$* , gdy równość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} f(x_n) = \int_{\mathcal{G}} f d\mu \quad (1.2)$$

jest spełniona dla wszystkich $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ i dla wszystkich $h \in \mathbb{N}$, jednostajnie względem h .

Definicja 1.7

Podzbiór $\mathcal{V}$ zbioru ciągłych funkcji zespolonych określonych na $\mathcal{G}$ nazywamy *jednostajnie zupełnym*, jeżeli dla każdej ciągłej, zespolonej funkcji f określonej na $\mathcal{G}$ i dla każdej rzeczywistej liczby dodatniej ε istnieją takie funkcje $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{V}$ i liczby zespolone $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, że

$$\forall_{x \in \mathcal{G}} \quad |f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f_i(x)| < \varepsilon.$$

Lemat 1.1

Niech $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}(\mathcal{G})$ będzie jednostajnie zupełnym zbiorem funkcji. Ciąg (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow$ równość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_{\mathcal{G}} f d\mu$$

jest spełniona dla wszystkich $f \in \mathcal{V}$.

Dowód:

$\Rightarrow$ Oczywiście.

$\Leftarrow$ Weźmy dowolną funkcję $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ oraz $\varepsilon > 0$; wiemy że $\mathcal{V}$ jest zbiorem jednostajnie zupełnym, zatem

$$\exists_{f_1, \dots, f_k \in \mathcal{V}} \quad \exists_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}} \quad |f - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i| < \varepsilon.$$

Stąd

$$|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{\mathcal{G}} f d\mu| = |\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \pm \int_{\mathcal{G}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i d\mu - \int_{\mathcal{G}} f d\mu| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{\mathcal{G}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i d\mu \right| + \left| \int_{\mathcal{G}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i d\mu - \int_{\mathcal{G}} f d\mu \right| \leq \\
& \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \pm \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(x_n) - \int_{\mathcal{G}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i d\mu \right| + \int_{\mathcal{G}} \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i - f \right| d\mu \leq \\
& \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f(x_n) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(x_n)] \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(x_n) - \int_{\mathcal{G}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i d\mu \right| + \int_{\mathcal{G}} \varepsilon d\mu \leq \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(x_n) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(x_n)| + \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_i(x_n) - \int_{\mathcal{G}} f_i d\mu \right| + \varepsilon \cdot \mu(\mathcal{G}) < \\
& \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon + \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_i(x_n) - \int_{\mathcal{G}} f_i d\mu \right| + \varepsilon \cdot 1
\end{aligned}$$

i dla dostatecznie dużych N otrzymujemy

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{\mathcal{G}} f d\mu \right| < 3 \cdot \varepsilon .$$

□

Uwaga 1.8

Analogicznie formułuje się i dowodzi kryterium dla doskonałego rozkładu.

1.1 Charaktery grup topologicznych

Definicja 1.8

Charakterem χ grupy $\mathcal{G}$ nazywamy każdy ciągły homomorfizm tej grupy w multiplikatywną grupę topologiczną $\mathbb{T}$ liczb zespolonych o module 1 (okrąg jednostkowy).

Przykład 1.3

Niech $\mathcal{C}_m, m \geq 1$ będzie grupą topologiczną, cykliczną rzędu m z przykładu 1.2. Charaktery $\mathcal{C}_m$ są w istocie odwzorowaniami χ_h , $h = 0, 1, \dots, m-1$ określonymi formułą

$$\chi_h(a^k) = \exp(2\pi i \cdot \frac{h}{m} k),$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Twierdzenie 1.2

Niech χ i φ będą dowolnymi różnymi od siebie charakterami grupy topologicznej $\mathcal{G}$, wtedy:

$$\int_{\mathcal{G}} \chi(x) \cdot \overline{\chi}(x) dx = 1, \quad (1.3)$$

$$\int_{\mathcal{G}} \chi(x) \cdot \overline{\varphi}(x) dx = 0. \quad (1.4)$$

Dowód:

Pierwsza równość jest oczywista, zajmijmy się drugą. Oznaczmy przez

$$\alpha = \int_{\mathcal{G}} \chi(x) \cdot \overline{\varphi}(x) dx.$$

Zwróćmy uwagę na to, że dla dowolnego $y \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \chi(y) \cdot \alpha \cdot \overline{\varphi}(y) &= \chi(y) \cdot \int_{\mathcal{G}} \chi(x) \cdot \overline{\varphi}(x) dx \cdot \overline{\varphi}(y) = \int_{\mathcal{G}} \chi(y) \cdot \chi(x) \cdot \overline{\varphi}(x) \cdot \overline{\varphi}(y) dx \\ &= \int_{\mathcal{G}} \chi(y \cdot x) \cdot \overline{\varphi}(x \cdot y) dx = \int_{\mathcal{G}} \chi(x) \cdot \overline{\varphi}(x) dx = \alpha, \end{aligned}$$

gdyż miara Haara jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Zatem

$$\chi(y) \cdot \alpha \cdot \overline{\varphi}(y) = \alpha$$

$$\chi(y) \cdot \alpha = \alpha \cdot \varphi(y).$$

Gdyby $\alpha \neq 0$ mielibysmy natychmiast:

$$\forall_{y \in \mathcal{G}} \chi(y) = \varphi(y),$$

co daje sprzeczność z założeniami. □

Podstawiając za $\varphi = 1$ otrzymujemy z powyższego twierdzenia:

Wniosek 1.2.1

Dla dowolnego nietrywialnego charakteru χ grupy topologicznej $\mathcal{G}$ zachodzi

$$\int_{\mathcal{G}} \chi d\mu = 0. \quad (1.5)$$

□

Uwaga 1.9

Oznaczmy

$$L^2(\mathcal{G}, \mu) = \{f : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{C} ; \int_{\mathcal{G}} |f|^2 d\mu < +\infty\}.$$

Wniosek 1.2.2

Zbiór $\hat{\mathcal{G}}$ wszystkich charakterów grupy topologicznej $\mathcal{G}$ jest układem ortonormalnym zespolonych funkcji ciągłych w $L^2(\mathcal{G}, \mu)$.

□

Jako fakt znany z literatury ([2], s. 223), bez dowodu przyjmujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.3 (Gelfanda-Rajkowa)

Dla każdego różnego od jedyńki elementu $x \in \mathcal{G}$ istnieje taki charakter χ grupy $\mathcal{G}$, że $\chi(x) \neq 1$.

□

Wniosek 1.3.1

Zbiór $\hat{\mathcal{G}}$ wszystkich charakterów grupy topologicznej $\mathcal{G}$ rozdziela punkty, tzn.

$$\forall_{x, y \in \mathcal{G}} x \neq y \Rightarrow \exists_{\chi \in \hat{\mathcal{G}}} \chi(x) \neq \chi(y).$$

Dowód:

Niech $x, y \in \mathcal{G}$, założmy że $x \neq y$, wtedy oczywiście $x \cdot y^{-1} \neq e_{\mathcal{G}}$, a więc z twierdzenia Gelfanda-Rajkowa (1.3) istnieje taki charakter $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$, że

$\chi(x \cdot y^{-1}) \neq 1$, a dzięki temu że każdy charakter jest w szczególności homomorfizmem grupowym mamy natychmiast $\chi(x \cdot y^{-1}) = \chi(x) \cdot \chi(y)^{-1}$, zatem $1 \neq \chi(x) \cdot \chi(y)^{-1} \Rightarrow \chi(x) \neq \chi(y)$.

□

Ponieważ dodatkowo $\hat{\mathcal{G}}$ jest zamknięty na mnożenie (tzn. $(\chi \cdot \varphi)(x) = \chi(x) \cdot \varphi(x)$) i branie funkcji sprzężonej, więc bezpośrednio z klasycznego twierdzenia Stone'a-Weierstrassa ([1], s.189) otrzymujemy

Twierdzenie 1.4

Zbiór wszystkich charakterów grupy topologicznej $\mathcal{G}$ jest zbiorem jednostajnie zupełnym.

Z wniosku 1.2.1, lematu 1.1 i powyższego twierdzenia natychmiast otrzymujemy poniższe wnioski:

Wniosek 1.4.1 (*Kryterium Weyla*)

Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą topologiczną. Ciąg $(x_n) \subset \mathcal{G}$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow$ równość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_n) = 0$$

jest spełniona dla wszystkich nietrywialnych charakterów χ grupy $\mathcal{G}$.

□

Wniosek 1.4.2 (*Kryterium Weyla dla ciągów doskonale rozłożonych*)

Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą topologiczną. Ciąg $(x_n) \subset \mathcal{G}$ jest doskonale rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow$ równość

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n) = 0$$

jest spełniona dla wszystkich nietrywialnych charakterów χ grupy $\mathcal{G}$ i dla wszystkich $h \in \mathbb{N}$, jednostajnie względem h .

□

1.2 Grupy ilorazowe

Rozpatrujemy wyłącznie grupy abelowe, zatem biorąc dowolną podgrupę $\mathcal{H}$ takiej grupy, mamy pewność, że jest ona jej dzielnikiem normalnym i dzięki temu możemy rozpatrywać grupę ilorazową $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Działania w grupie $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ określone są oczywiście w sposób następujący:

$*$: $\mathcal{G}/\mathcal{H} \times \mathcal{G}/\mathcal{H} \mapsto \mathcal{G}/\mathcal{H}$, dla dowolnych $x \cdot \mathcal{H}, y \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$

$$(x \cdot \mathcal{H}) * (y \cdot \mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot y) \cdot \mathcal{H} \quad (1.6)$$

oraz $(\cdot)^{-1} : \mathcal{G}/\mathcal{H} \mapsto \mathcal{G}/\mathcal{H}$ dla dowolnego $x \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$

$$(x \cdot \mathcal{H})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1} \cdot \mathcal{H}. \quad (1.7)$$

Zajmijmy się teraz wprowadzeniem topologii w zbiorze $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, wykorzystamy do tego celu odwzorowanie kanoniczne $\varphi_{\mathcal{H}} : x \mapsto x \cdot \mathcal{H}$.

Lemat 1.5

Rodzina zbiorów: $\mathcal{Q} = \{\mathcal{S} \subset \mathcal{G}/\mathcal{H}; \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{S}) \text{ jest zbiorem otwartym w } \mathcal{G}\}$ zadaje tzw. **topologię ilorazową** w zbiorze $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Dowód:

Zarówno $\emptyset = \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\emptyset)$ jak i $\mathcal{G} = \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ są zbiorami otwartymi w $\mathcal{G}$, zatem $\emptyset$ i $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ należą do $\mathcal{Q}$.

Z własności przeciwobrazów otrzymujemy natychmiast spełnianie dwóch pozostałych warunków dla topologii. Rzeczywiście, weźmy dwa dowolne zbiory $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ należące do $\mathcal{Q}$.

$$\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{B}_1) \cap \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{B}_2)$$

jako przekrój dwóch zbiorów otwartych w $\mathcal{G}$ jest zbiorem otwartym, tak więc $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \in \mathcal{Q}$.

Teraz niech $\{\mathcal{B}_s; s \in \mathcal{S}\}$ będzie rodziną zbiorów otwartych w $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

$$\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}\left(\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{B}_s\right) = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{B}_s)$$

jako suma zbiorów otwartych w $\mathcal{G}$ jest zbiorem otwartym, tak więc $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{B}_s \in \mathcal{Q}$

□

Uwaga 1.10

Przy tak określonej topologii odwzorowanie kanoniczne $\varphi_{\mathcal{H}} : x \mapsto x \cdot \mathcal{H}$ jest ciągłym i dodatkowo otwartym homomorfizmem z $\mathcal{G}$ na $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Rzeczywiście, ciągłość $\varphi_{\mathcal{H}}$ wynika wprost z definicji topologii ilorazowej, zajmijmy się więc problemem otwartości $\varphi_{\mathcal{H}}$. Niech $\mathcal{U}$ będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$. Wówczas

$$\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\varphi_{\mathcal{H}}(\mathcal{U})) = \{g \in \mathcal{G}; \varphi_{\mathcal{H}}(g) \in \varphi_{\mathcal{H}}(\mathcal{U})\} = \{g \in \mathcal{G}; g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{H}\} =$$

$$\{g \in \mathcal{G}; \exists_{u \in \mathcal{U}} g \cdot \mathcal{H} = u \cdot \mathcal{H}\} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u \cdot \mathcal{H} = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{U} \cdot h.$$

Zatem $\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\varphi_{\mathcal{H}}(\mathcal{U}))$ jest zbiorem otwartym jako suma zbiorów otwartych i stąd $\varphi_{\mathcal{H}}(\mathcal{U})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

□

Wniosek 1.5.3

Jeśli $\mathcal{H}$ jest domkniętą podgrupą grupy topologicznej $\mathcal{G}$, to $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ z topologią określoną powyżej jest grupą topologiczną.

Dowód:

Najpierw zajmijmy się ciągłością działań grupowych.

Zwróćmy uwagę na to, że $*$ jest złożeniem homomorfizmu kanonicznego $\varphi_{\mathcal{H}}$ z działaniem grupowym dwuargumentowym grupy $\mathcal{G}$, gdyż dla dowolnych $x \cdot \mathcal{H}, y \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ mamy:

$$(x \cdot \mathcal{H}) * (y \cdot \mathcal{H}) = (x \cdot y) \cdot \mathcal{H} = \varphi_{\mathcal{H}}(x \cdot y)$$

Obie te funkcje są ciągłe, stąd otrzymujemy ciągłość $*$.

Analogicznie, również $(\cdot)^{-1}$ jest złożeniem homomorfizmu kanonicznego $\varphi_{\mathcal{H}}$ z działaniem grupowym jednoargumentowym grupy $\mathcal{G}$, gdyż dla dowolnego $x \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ mamy

$$(x \cdot \mathcal{H})^{-1} = x^{-1} \cdot \mathcal{H} = \varphi_{\mathcal{H}}(x^{-1}).$$

Jako złożenie dwóch funkcji ciągłych jest więc funkcją ciągłą.

Pokażemy teraz że $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ jest $\mathcal{T}_1$ -przestrzenią.

Ze względu na ciągłość mnożenia wystarczy pokazać, że jedynka grupy $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, czyli $\mathcal{H}$ jest podzbiorem domkniętym, ale $\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ jest z założenia podzbiorem domkniętym w $\mathcal{G}$. □

Ciągły obraz zbioru zwartego jest zbiorem zwartym, zatem

Wniosek 1.5.4

Zwartość grupy $\mathcal{G}$ pociąga za sobą zwartość grupy $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

□

1.3 Izomorfizmy topologiczne

Definicja 1.9

Niech $\mathcal{G}_1$ oraz $\mathcal{G}_2$ będą grupami topologicznymi. Odwzorowanie z $\mathcal{G}_1$ w $\mathcal{G}_2$ będące

ciągłym homomorfizmem grupowym nazywać będziemy *homomorfizmem topologicznym*.

Odwzorowanie z $\mathcal{G}_1$ na $\mathcal{G}_2$ będące izomorfizmem grup oraz homeomorfizmem nazywać będziemy *izomorfizmem topologicznym*.

Jeśli takie odwzorowanie istnieje między grupami topologicznymi $\mathcal{G}_1$ oraz $\mathcal{G}_2$, to grupy te nazywać będziemy *topologicznie izomorficznymi*.

Twierdzenie 1.6

Dowolny charakter zwartej i abelowej grupy $\mathcal{G}$ jest odwzorowaniem domkniętym.

Dowód:

Weźmy dowolny charakter χ grupy $\mathcal{G}$ oraz zbiór domknięty $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Zgodnie z uwagą 1.5, zbiór ten jako podprzestrzeń grupy $\mathcal{G}$ jest przestrzenią zwartą. Ponadto χ jest funkcją ciągłą, a ciągły obraz przestrzeni zwartej w przestrzeni Hausdorffa jest zbiorem zwartym. Zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni, zatem ostatecznie $\chi(\mathcal{F})$ jest domknięty w $\mathbb{T}$. □

Przykład 1.4

Wyznamy wszystkie podgrupy domknięte okręgu.

Weźmy dowolną podgrupę domkniętą $\mathcal{H}$ okręgu $\mathbb{T}$, niech $\mathcal{H} \neq \{1\}$. Przez α oznaczmy $\inf\{\arg z; z \in \mathcal{H}, z \neq 1\}$.

Mogą zajść dwa następujące przypadki:

1. $\alpha = 0$

Rozpatrzmy wtedy pewien otwarty przedział $(\beta, \gamma) \subseteq [0, 2\pi)$.

Skoro $\inf\{\arg z; z \in \mathcal{H}, z \neq 1\} = 0$, to musi istnieć taki $z \in \mathcal{H}$, że

$0 < \arg z < \gamma - \beta$, zatem i $\exists_{n \in \mathbb{N}} \arg z^n \in (\beta, \gamma)$.

Oczywiście $z^n \in \mathcal{H}$, pokazaliśmy więc, że $\mathcal{H}$ kroi się niepusto z każdym zbiorem otwartym na okręgu, zatem $\mathcal{H}$ jest zbiorem gęstym na okręgu, biorąc więc pod uwagę domkniętość $\mathcal{H}$ otrzymujemy $\mathcal{H} = \mathbb{T}$.

2. $\alpha > 0$

Weźmy $z_0 = e^{i\alpha}$, oczywiście dzięki domkniętości $\mathcal{H}$ mamy natychmiast $z_0 \in \mathcal{H}$. Rozpatrzmy dowolną liczbę zespoloną $z \in \mathcal{H}$. Wtedy

$$\exists_{n \in \mathbb{Z}} \exists_{0 \leq \delta < \alpha} \arg z = n \cdot \alpha + \delta.$$

Oczywiście $\arg(z \cdot z_0^{-n}) = \delta$, ale $\mathcal{H}$ jest podgrupą okręgu zatem $z \cdot z_0^{-n} \in \mathcal{H}$. Biorąc pod uwagę definicję α i założenie $0 \leq \delta < \alpha$, otrzymujemy natychmiast $\delta = 0$. Zatem wszystkie $z \in \mathcal{H}$ mają postać $z = z_0^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, tak więc $\mathcal{H}$ jest podgrupą cykliczną.

Wniosek 1.6.1

Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą zwartą i abelową, wtedy obraz $\chi(\mathcal{G})$ grupy $\mathcal{G}$ względem charakteru χ jest domkniętą podgrupą grupy $\mathbb{T}$ i jest równy jednej z powyższych grup.

Możemy zatem wprowadzić następującą terminologię:

Definicja 1.10

Jeżeli $\chi(\mathcal{G})$ jest grupą cykliczną (a więc i dyskretną), to mówimy, że χ jest *charakterem dyskretnym*.

Jeżeli $\chi(\mathcal{G}) = \mathbb{T}$, to χ nazywamy *charakterem niedyskretnym*.

Przykład 1.5

Grupa topologiczna $\mathbb{T}$ ma tylko dwa automorfizmy, są nimi odwzorowania $\varphi(x) = x$ i $\phi(x) = x^{-1}$.

Niech γ będzie dowolnym automorfizmem grupy $\mathbb{T}$. Jedynym elementem rzędu 2 w grupie $\mathbb{T}$ jest -1 i wobec tego $\gamma(-1) = -1$. Następnie w $\mathbb{T}$ istnieją dwa elementy rzędu 4, a mianowicie ι i $-\iota$; możliwe są wobec tego dwa przypadki: $\gamma(\iota) = \iota$ lub $\gamma(\iota) = -\iota$. Są one realizowane odpowiednio przez automorfizmy φ i ϕ . Pokażemy teraz, że $\mathbb{T}$ nie posiada innych automorfizmów.

Zajmijmy się przypadkiem $\gamma(\iota) = \iota$. Element $\exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{8})$ może przy automorfizmie γ przejść jedynie na elementy $\exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{8})$, $\exp(2\pi\iota \cdot \frac{3}{8})$, $\exp(2\pi\iota \cdot \frac{5}{8})$, $\exp(2\pi\iota \cdot \frac{7}{8})$. Ponieważ jednak automorfizm γ jest homeomorfizmem, zachowuje on uporządkowanie cykliczne elementów $\mathbb{T}$ i wobec tego, że

$$\gamma(1) = 1, \gamma(\iota) = \iota, \gamma(-1) = -1, \gamma(-\iota) = -\iota,$$

wnioskujemy, że $\gamma(\exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{8})) = \exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{8})$. Postępując w ten sposób dalej przekonamy się, że

$$\gamma(\exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{2^n})) = \exp(2\pi\iota \cdot \frac{1}{2^n}).$$

A stąd dla $0 \leq m < 2^n$, otrzymujemy

$$\gamma(\exp(2\pi i \cdot \frac{m}{2^n})) = \exp(2\pi i \cdot \frac{m}{2^n}).$$

Biorąc pod uwagę ciągłość automorfizmu γ i ostatnią równość, wnioskujemy, że $\gamma = \varphi$.

Zupełnie tak samo rozpatrujemy przypadek $\gamma(i) = -i$. Otrzymujemy wtedy $\gamma = \phi$.

Lemat 1.7

Niech $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ będą grupami topologicznymi, zaś $f : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}$ homomorfizmem topologicznym między tymi grupami.

f jest odwzorowaniem otwartym $\Leftrightarrow$ dla dowolnego otoczenia jedynki $\mathcal{U}$ w $\mathcal{G}$ istnieje takie otoczenie jedynki $\mathcal{V}$ w $\mathcal{H}$, że $\mathcal{V} \subset f(\mathcal{U})$.

Dowód:

$\Rightarrow$ oczywiste, za $\mathcal{V}$ wystarczy przyjąć $f(\mathcal{U})$, które jest zbiorem otwartym, bo f jest odwzorowaniem otwartym.

$\Leftarrow$ Weźmy dowolny zbiór otwarty $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, pokażemy że $f(\mathcal{S})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{H}$. Niech $x \in \mathcal{S}$, $f(x) = y$; zauważmy że $x^{-1} \cdot \mathcal{S}$ jest otoczeniem jedynki w $\mathcal{G}$, zatem z założenia istnieje takie otoczenie jedynki $\mathcal{V}$ w $\mathcal{H}$, że

$$\mathcal{V} \subset f(x^{-1} \cdot \mathcal{S}) = f(x^{-1}) \cdot f(\mathcal{S}).$$

Zatem

$$f(x) \cdot \mathcal{V} \subset f(\mathcal{S})$$

oraz

$$y \cdot \mathcal{V} \subset f(\mathcal{S}).$$

Znaleźliśmy zatem takie otoczenie $y \in f(\mathcal{S})$ postaci $y \cdot \mathcal{V}$, że zawiera się ono w $f(\mathcal{S})$, zbiór $f(\mathcal{S})$ jest więc zbiorem otwartym. $\square$

Definicja 1.11

Mówimy, że grupa topologiczna $\mathcal{G}$ ma *własność Baire'a*, gdy dla dowolnego pokrycia $\mathcal{G}$ rodziną zbiorów domkniętych $\{\mathcal{D}_i ; i \in \mathbb{N}\}$ znajdziemy takie $i_0 \in \mathbb{N}$, że $\text{Int}\mathcal{D}_{i_0} \neq \emptyset$.

Uwaga 1.11

Twierdzenie Baire'a ([1], rozdział 3, paragraf 9) stanowi, że wszystkie przestrzenie zwarte (a nawet lokalnie zwarte) mają własność Baire'a.

Twierdzenie 1.8

Homomorfizm topologiczny $f : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}$ "na" grupę $\mathcal{H}$ mającą własność Baire'a jest odwzorowaniem otwartym.

Dowód:

Wykorzystamy lemat 1.7. Weźmy dowolne otoczenie jedynek $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ i wybierzmy takie otoczenie jedynek $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}$, że

$$\overline{\mathcal{W}}^{-1} \cdot \overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{U}$$

(patrz uwaga 1.4).

Z pokrycia $\mathcal{G}$ zbiorami otwartymi postaci $\{x \cdot \mathcal{W} ; x \in \mathcal{G}\}$ dzięki zwartości $\mathcal{G}$ możemy wybrać podpokrycie skończone

$$\mathcal{G} = \bigcup_{x \in \mathcal{G}} x \cdot \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^n x_i \cdot \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^n x_i \cdot \overline{\mathcal{W}}.$$

Wiemy, że f jest "na", stąd

$$\mathcal{H} = f(\mathcal{G}) = f\left(\bigcup_{i=1}^n x_i \cdot \overline{\mathcal{W}}\right) = \bigcup_{i=1}^n f(x_i \cdot \overline{\mathcal{W}}).$$

Zbiory postaci $x_i \cdot \overline{\mathcal{W}}$ są domkniętymi podzbiorami przestrzeni zwartej, zatem są zwarte, f zaś jest ciągła, zatem obrazy $f(x_i \cdot \overline{\mathcal{W}})$ również są zbiorami zwartymi. $\mathcal{H}$ ma własność Baire'a, dzięki temu możemy wybrać takie $1 \leq i_0 \leq n$, że $\text{Int}f(x_{i_0} \cdot \overline{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$. Stąd $\text{Int}[f(x_{i_0}) \cdot f(\overline{\mathcal{W}})] \neq \emptyset$, a więc $\text{Int}f(\overline{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$.

Wyberzmy zatem dowolny niepusty zbiór otwarty $\mathcal{V} \subset f(\overline{\mathcal{W}})$. Dla $y \in \mathcal{V}$ weźmy $x \in f^{-1}(y) \cap \overline{\mathcal{W}}$. W szczególności $x \in \overline{\mathcal{W}}$, a wtedy $x^{-1} \cdot \overline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{U}$ oraz

$$f(\mathcal{U}) \supset f(x^{-1} \cdot \overline{\mathcal{W}}) = f(x^{-1}) \cdot f(\overline{\mathcal{W}}) = (f(x))^{-1} \cdot f(\overline{\mathcal{W}}) = y^{-1} \cdot f(\overline{\mathcal{W}}) \supset y^{-1} \cdot \mathcal{V}.$$

Zauważmy, że $y^{-1} \cdot \mathcal{V}$ jest zbiorem otwartym. Z tego, że $y \in \mathcal{V}$ mamy $e_{\mathcal{H}} \in y^{-1} \cdot \mathcal{V}$, zatem $y^{-1} \cdot \mathcal{V}$ jest szukanym przez nas otoczeniem jedynek w $\mathcal{H}$ spełniającym $y^{-1} \cdot \mathcal{V} \subset f(\mathcal{U})$. □

Wniosek 1.8.1

Każdy niedyskretny charakter grupy topologicznej jest odwzorowaniem otwartym.

□

Twierdzenie 1.9 (Twierdzenie o izomorfizmie)

Niech $\phi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}_1$ będzie otwartym i ciągłym homomorfizmem grup topologicznych $\mathcal{G}$ na $\mathcal{G}_1$ z jądrem $\mathcal{H}$. Wtedy $\mathcal{G}_1$ jest topologicznie izomorficzna z grupą ilorazową $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Dowód:

Określamy $\nu : \mathcal{G}_1 \mapsto \mathcal{G}/\mathcal{H}$ następująco: dla dowolnego $g \in \mathcal{G}_1$, $\exists_{x \in \mathcal{G}} \phi(x) = g$, bo ϕ jest "na", połóżmy więc $\nu(g) = \varphi_{\mathcal{H}}(x)$.

Pokażemy najpierw, że ν jest poprawnie określone.

Weźmy $x, y \in \mathcal{G}$, takie że $\phi(x) = \phi(y)$. Wówczas

$$\phi(x) = \phi(y) \Leftrightarrow \phi(x) \cdot (\phi(y))^{-1} = e_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow \phi(x) \cdot \phi(y^{-1}) = e_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow$$

$$\phi(x \cdot y^{-1}) = e_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in \ker \phi = \mathcal{H} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{H}}(x \cdot y^{-1}) = e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{\mathcal{H}}(x) \cdot \varphi_{\mathcal{H}}(y^{-1}) = e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{H}}(x) \cdot (\varphi_{\mathcal{H}}(y))^{-1} = e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{H}}(x) = \varphi_{\mathcal{H}}(y).$$

Pokażemy teraz, że ν jest homomorfizmem grupowym.

Weźmy $a, b \in \mathcal{G}_1$, $\exists_{x, y \in \mathcal{G}} \phi(x) = a$ i $\phi(y) = b$, zwróćmy uwagę na to że $a \cdot b = \phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(x \cdot y)$, zatem zgodnie z definicją ν otrzymujemy

$$\nu(a \cdot b) = \varphi_{\mathcal{H}}(x \cdot y) = \varphi_{\mathcal{H}}(x) \cdot \varphi_{\mathcal{H}}(y) = \nu(a) \cdot \nu(b).$$

Pokażemy teraz, że ν jest homomorfizmem "na".

Weźmy dowolne $g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, niewątpliwie $\varphi_{\mathcal{H}}(g) = g \cdot \mathcal{H}$. Oczywiście $\phi(g) \in \mathcal{G}_1$ i dodatkowo $\nu(\phi(g)) = \varphi_{\mathcal{H}}(g) = g \cdot \mathcal{H}$.

Pokażemy teraz, że ν jest homomorfizmem różnowartościowym.

Weźmy $g \in \mathcal{G}_1$, $\exists_{x \in \mathcal{G}} \phi(x) = g$ oraz

$$g \in \ker \nu \Leftrightarrow \nu(g) = e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{H}}(x) = e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \Leftrightarrow x \in \ker \varphi_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow$$

$$x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x \in \ker \phi \Leftrightarrow \phi(x) = e_{\mathcal{G}_1} \Leftrightarrow g = e_{\mathcal{G}_1}.$$

Tak więc $\ker \nu = \{e_{\mathcal{G}_1}\}$, zatem ν jest różnowartościowe.

Pokażemy teraz, że ν jest odwzorowaniem ciągłym.

Zauważmy najpierw, że

$$\nu^{-1}(\mathcal{A}) = \phi(\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{A}))$$

dla dowolnego $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}/\mathcal{H}$, gdyż

$$g \in \nu^{-1}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \nu(g) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{H}}(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow g \in \phi(\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{A})).$$

Teraz już otrzymujemy, biorąc dowolny zbiór otwarty $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}/\mathcal{H}$, że $\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{S})$ jest otwarty w $\mathcal{G}$, bo $\varphi_{\mathcal{H}}$ jest ciągły. Wiemy z założeń, że ϕ jest homomorfizmem otwartym, zatem $\phi(\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{S}))$ jest otwarty w $\mathcal{G}_1$, a z powyższych rozważań mamy, że $\nu^{-1}(\mathcal{S}) = \phi(\varphi_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{S}))$ jest otwarty w $\mathcal{G}_1$.

Pokażemy teraz, że ν jest odwzorowaniem otwartym.

Zauważmy najpierw, że zgodnie z definicją ν , dla dowolnego $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}_1$

$$\nu(\mathcal{A}) = \varphi_{\mathcal{H}}(\phi^{-1}(\mathcal{A})).$$

Weźmy dowolny zbiór otwarty $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}_1$, wtedy z ciągłości ϕ wnioskujemy, że zbiór $\phi^{-1}(\mathcal{A})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$. Wiemy już, że odwzorowanie kanoniczne $\varphi_{\mathcal{H}}$ jest odwzorowaniem otwartym, zatem ostatecznie $\varphi_{\mathcal{H}}(\phi^{-1}(\mathcal{A}))$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. $\square$

Uwaga 1.12

Niech χ będzie dowolnym nietrywialnym charakterem grupy topologicznej $\mathbb{T}$. Zgodnie z twierdzeniem 1.6, $\chi(\mathbb{T})$ jest domkniętą podgrupą $\mathbb{T}$ i biorąc pod uwagę przykład 1.4 i spójność grupy $\mathbb{T}$ otrzymujemy natychmiast $\chi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

Przykład 1.6

Każdy charakter $\chi \in \hat{\mathbb{T}}$ jest postaci $\chi_m(x) = x^m$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. $\hat{\mathbb{T}}$ izomorficzna jest z grupą liczb całkowitych, izomorfizm ten zadaje odwzorowanie $m \in \mathbb{Z} \mapsto \chi_m$.

Niech χ będzie dowolnym charakterem grupy topologicznej $\mathbb{T}$, $\mathcal{H}$ zaś niech będzie jego jądrem. Zgodnie z przykładem 1.4, grupa $\mathcal{H}$ jest albo identyczna z $\mathbb{T}$, albo jest skończoną podgrupą pierwiastków ustalonego stopnia $m \in \mathbb{N}$ z jedynek.

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z charakterem trywialnym $\chi_e = \chi_0$.

Założmy, że zachodzi drugi przypadek. Wykorzystując uwagę 1.12 i twierdzenie 1.9, dochodzimy do wniosku, że odwzorowania $\alpha_m, \beta : \mathbb{T}/\mathcal{H} \mapsto \mathbb{T}$ określone wzorami $\alpha_m(z \cdot \mathcal{H}) = z^m$ oraz $\beta(z \cdot \mathcal{H}) = \chi(z)$ są izomorfizmami topologicznymi. Zwróćmy uwagę na to, że

$$\chi(z) = \beta(z \cdot \mathcal{H}) = (\beta \circ \alpha_m^{-1})(z^m),$$

a przecież $\beta \circ \alpha_m^{-1} : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$ jest automorfizmem $\mathbb{T}$, więc z przykładu 1.5 otrzymujemy

$$\chi(z) = z^m \text{ lub } \chi(z) = z^{-m}.$$

Rozdział 2

Teoria dualności

W tym rozdziale będziemy zakładać, że dana grupa topologiczna $\mathcal{G}$ jest lokalnie zwarta, abelowa. Zbiór wszystkich charakterów tej grupy może być przekształcony w grupę, przy czym działania w tej grupie określamy:

- iloczyn dwóch charakterów

$$\forall_{x \in \mathcal{G}} (\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x),$$

- charakter odwrotny do danego

$$\forall_{x \in \mathcal{G}} \chi^{-1}(x) = \overline{\chi(x)}.$$

Jednością tej grupy jest charakter trywialny grupy $\mathcal{G}$.

Grupę tę nazywać będziemy *grupą dualną* do $\mathcal{G}$ i oznaczać przez $\hat{\mathcal{G}}$.

Topologię w tej grupie określamy wybierając jako bazę otoczeń jedynek w $\hat{\mathcal{G}}$ podzbiory postaci:

$$\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon) = \{ \chi \in \hat{\mathcal{G}}; \forall_{x \in \mathcal{K}} | \chi(x) - 1 | < \varepsilon \} , \quad (2.1)$$

gdzie $\mathcal{K}$ jest zwartym podzbiorem grupy $\mathcal{G}$, zaś $\varepsilon > 0$.

Dowodzi się (patrz [2], rozdział 6, paragraf 34), że $\hat{\mathcal{G}}$ staje się w ten sposób grupą topologiczną i to lokalnie zwartą. Poniższe twierdzenia pokażą nam inne ciekawe własności tak zdefiniowanej struktury.

2.1 Związki między zwartością i dyskretnością w grupach dualnych

Lemat 2.1

Grupa topologiczna $\mathcal{G}$ jest dyskretna $\Leftrightarrow \{e_{\mathcal{G}}\}$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$.

Dowód:

$\Rightarrow$ Oczywiście

$\Leftarrow$ Niech $\{e_{\mathcal{G}}\}$ będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$. Wybierzmy dowolne $g \in \mathcal{G}$, wtedy $g \cdot \{e_{\mathcal{G}}\}$ jest otoczeniem g , w szczególności więc zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$, ale $g \cdot \{e_{\mathcal{G}}\} = \{g\}$, zatem każdy zbiór jednopunktowy jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$, więc każdy podzbiór $\mathcal{G}$ jest otwarty. $\square$

Twierdzenie 2.2

Jeśli grupa topologiczna $\mathcal{G}$ jest zwarta, to grupa charakterów $\hat{\mathcal{G}}$ grupy $\mathcal{G}$ jest dyskretna.

Dowód:

Pokażemy, że zbiór postaci $\{\chi_e\}$ jest zbiorem otwartym w $\hat{\mathcal{G}}$.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego charakteru $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$, biorąc pod uwagę to, że w szczególności jest on funkcją ciągłą, a $\mathcal{G}$ jest zbiorem zwartym, otrzymujemy $\chi(\mathcal{G})$ jest zwartym, a co za tym idzie domkniętym podzbiorem $\mathbb{T}$.

Pamiętając o tym, możemy teraz rozważyć otoczenie jedynek w $\hat{\mathcal{G}}$ postaci $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \frac{1}{3})$, które niewątpliwie zawiera χ_e .

Weźmy dowolny nietrywialny charakter $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$, $\chi(\mathcal{G})$ jest domkniętą podgrupą $\mathbb{T}$, zatem zgodnie z rozważaniami z rozdziału pierwszego mogą zajść dwa przypadki:

1. $\chi(\mathcal{G}) = \mathbb{T}$.

χ jest "na", zatem $\exists_{g \in \mathcal{G}} \chi(g) = i$, a przecież

$$|\chi(g) - 1| = |i - 1| = \sqrt{2} > \frac{1}{3},$$

zatem $\chi \notin \mathcal{U}(\mathcal{G}, \frac{1}{3})$.

2. $\chi(\mathcal{G})$ stanowi podgrupę pierwiastków n -tego stopnia z 1 ($n \geq 2$).

Ponadto

$$\exists_{z \in \chi(\mathcal{G})} \arg z = \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \exists_{g \in \mathcal{G}} \arg \chi(g) = \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

Dla tego właśnie g otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\chi(g) - 1| &= |\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha - 1| = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 - 2 \cdot \cos \alpha} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Ale dla $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ mamy $\cos \alpha \leq 0$, zatem

$$|\chi(g) - 1| \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{2} > \frac{1}{3}$$

i stąd $\chi \notin \mathcal{U}(\mathcal{G}, \frac{1}{3})$. Ostatecznie $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \frac{1}{3}) = \{\chi_e\}$, co biorąc pod uwagę poprzedni lemat, daje nam natychmiast wniosek, że $\hat{\mathcal{G}}$ jest dyskretna. $\square$

Twierdzenie 2.3

Jeśli grupa topologiczna $\mathcal{G}$ jest dyskretna, to grupa charakterów $\hat{\mathcal{G}}$ grupy $\mathcal{G}$ jest zwarta.

Dowód:

Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą topologiczną dyskretną.

Oznaczmy przez

$$\mathcal{K} = \prod_{g \in \mathcal{G}} \mathbb{T}_g, \text{ gdzie } \mathbb{T}_g = \mathbb{T}.$$

Na $\mathcal{K}$ rozpatrujemy topologię produktową, zatem z twierdzenia Tichonowa ([1], s. 182) $\mathcal{K}$ jest przestrzenią zwartą. Dowolny element $\alpha = (\alpha_{\mathbb{T}_g})_{g \in \mathcal{G}} \in \mathcal{K}$ możemy rozpatrywać jako funkcję $\alpha : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{T}$, jeśli dla dowolnego $g \in \mathcal{G}$ położymy $\alpha(g) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\mathbb{T}_g)$. Dzięki założeniu o dyskretności $\mathcal{G}$ wszystkie takie α są funkcjami ciągłymi.

Niech teraz dla ustalonych $x, y \in \mathcal{G}$

$$\mathcal{A}^{x,y} = \{\alpha \in \mathcal{K}; \alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)\}.$$

Tak zdefiniowany $\mathcal{A}^{x,y}$ jest domknięty w przestrzeni $\mathcal{K}$ z topologią produktową. Rzeczywiście, założymy, że $\alpha \notin \mathcal{A}^{x,y}$, tzn.

$$|\alpha(x \cdot y) - \alpha(x) \cdot \alpha(y)| = \varepsilon > 0.$$

Niech

$$\mathcal{V}_x = \{\beta \in \mathcal{K}; |\beta(x) - \alpha(x)| < \delta\},$$

$$\mathcal{V}_y = \{\beta \in \mathcal{K}; |\beta(y) - \alpha(y)| < \delta\},$$

$$\mathcal{V}_{xy} = \{\beta \in \mathcal{K}; |\beta(xy) - \alpha(xy)| < \delta\}$$

wtedy $\alpha \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_{xy}$ oraz $\mathcal{V}$ jest otoczeniem α w topologii produktowej, Jeśli tylko δ jest dostatecznie mała, to $\forall_{\beta \in \mathcal{V}} \beta(x \cdot y) \neq \beta(x) \cdot \beta(y)$, zatem $\mathcal{K} \setminus \mathcal{A}^{x,y}$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{K}$.

Zwróćmy uwagę, że

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigcap_{x,y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}^{x,y}$$

jako przekrój rodziny zbiorów domkniętych jest również zbiorem domkniętym, przestrzeń $\mathcal{K}$ jest przestrzenią zwartą, jako produkt przestrzeni zwartych, zatem $\hat{\mathcal{G}}$ jest zwartym podzbiorem $\mathcal{K}$.

Topologia produktowa $\mathcal{O}_1$ dziedziczona przez $\hat{\mathcal{G}}$ z $\mathcal{K}$ jest równoważna topologii $\mathcal{O}_2$ grupy charakterów wprowadzonej za pomocą bazy otoczeń jedynek (2.1), co pokażemy poniżej.

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2:$$

Niech

$$V = \prod_{j \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0} \mathbb{T}_j \times \prod_{j \in \mathcal{G}_0} B^j(1, \varepsilon_j),$$

będzie zbiorem bazowym w topologii produktowej na $\mathcal{K}$, gdzie $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, jest zbiorem skończonym, zaś $B^j(1, \varepsilon_j) = \{z \in \mathbb{T}_j; |z - 1| < \varepsilon_j\}$. Wówczas

$$\hat{\mathcal{G}} \cap V = \bigcap_{j \in \mathcal{G}_0} \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; |\chi(j) - 1| < \varepsilon_j\} = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; \forall_{j \in \mathcal{G}_0} |\chi(j) - 1| < \varepsilon_j\}.$$

Ponieważ $\mathcal{G}_0$ jest zbiorem skończonym, więc

$$\hat{\mathcal{G}} \cap V = \bigcap_{j \in \mathcal{G}_0} \mathcal{U}(\{j\}, \varepsilon_j)$$

jest zbiorem otwartym w topologii $\mathcal{O}_2$.

$$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1:$$

Niech $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{H}, \varepsilon)$ będzie otoczeniem jedynek w $\hat{\mathcal{G}}$, gdzie $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ jest zbiorem

zwartym, a $\varepsilon > 0$. Wiemy, że $\mathcal{G}$ jest grupą dyskretną, zatem $\mathcal{H}$ jest zbiorem skończonym, $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_s\}$. Stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathcal{H}, \varepsilon) &= \mathcal{U}(\{h_1, \dots, h_s\}, \varepsilon) = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; \bigvee_{1 \leq i \leq s} |\chi(h_i) - 1| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{1 \leq i \leq s} \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; |\chi(h_i) - 1| < \varepsilon\} = \hat{\mathcal{G}} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq s} \prod_{h_i \neq j \in \mathcal{G}} \mathbb{T}_j \times \mathcal{B}^{h_i}(1, \varepsilon) \end{aligned}$$

jest zbiorem otwartym w topologii $\mathcal{O}_1$.

Równoważność tych topologii daje nam ostatecznie tezę twierdzenia. $\square$

2.2 Twierdzenie Pontriagina o dualności

Mając grupę charakterów $\hat{\mathcal{G}}$ grupy topologicznej $\mathcal{G}$ możemy rozpatrywać grupę dualną do niej, oznaczać ją będziemy przez $\tilde{\mathcal{G}}$.

Okazuje się, że grupa $\tilde{\mathcal{G}}$ jest izomorficzna topologicznie z wyjściową grupą $\mathcal{G}$. Zauważmy najpierw, że zdefiniowanie dla ustalonego $x \in \mathcal{G}$ odwzorowania $\hat{x} : \hat{\mathcal{G}} \mapsto \mathbb{T}$ określonego wzorem

$$\bigvee_{\chi \in \hat{\mathcal{G}}} \hat{x}(\chi) = \chi(x)$$

i będącego oczywiście charakterem grupy $\hat{\mathcal{G}}$, pozwala nam na zanurzenie algebraiczne grupy $\mathcal{G}$ w grupę $\tilde{\mathcal{G}}$.

Następujące twierdzenie (którego dowód można znaleźć w pracy [2], rozdział 6, paragraf 37) mówi nam o związkach między grupą topologiczną $\mathcal{G}$ a grupą $\tilde{\mathcal{G}}$.

Twierdzenie 2.4 (*Pontriagina o dualności*)

Niech $\mathcal{G}$ będzie lokalnie zwartą grupą abelową, wtedy grupa charakterów $\hat{\mathcal{G}}$ grupy $\mathcal{G}$ jest topologicznie izomorficzna z $\mathcal{G}$.

Izomorfizm ten zadaje odwzorowanie $\lambda : \mathcal{G} \mapsto \tilde{\mathcal{G}}$ określone wzorem $\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{x}$.

2.3 Anihilatory

Lemat 2.5

Niech $f : \mathcal{G}_1 \mapsto \mathcal{G}_2$ będzie homomorfizmem topologicznym grupy $\mathcal{G}_1$ w grupę $\mathcal{G}_2$.

Odwzorowanie $\varphi : \hat{\mathcal{G}}_2 \mapsto \hat{\mathcal{G}}_1$ zdefiniowane w sposób następujący:

$$\varphi(\chi) = \chi \circ f$$

jest homomorfizmem topologicznym grupy $\hat{\mathcal{G}}_2$ w grupę $\hat{\mathcal{G}}_1$.

Homomorfizm ten nazywać będziemy **homomorfizmem sprzężonym** z f .

Dowód:

Odwzorowanie $\chi \circ f$ jest homomorfizmem, jako złożenie dwóch homomorfizmów, $\mathcal{G}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\chi} \mathbb{T}$, jest więc charakterem grupy $\mathcal{G}_1$, zatem φ jest poprawnie określone.

Niech $\chi_1^{\mathcal{G}_2}$ i $\chi_2^{\mathcal{G}_2}$ będą charakterami grupy $\mathcal{G}_2$. Wówczas

$$\varphi(\chi_1^{\mathcal{G}_2} \cdot \chi_2^{\mathcal{G}_2}) = (\chi_1^{\mathcal{G}_2} \cdot \chi_2^{\mathcal{G}_2}) \circ f = (\chi_1^{\mathcal{G}_2} \circ f) \cdot (\chi_2^{\mathcal{G}_2} \circ f) = \varphi(\chi_1^{\mathcal{G}_2}) \cdot \varphi(\chi_2^{\mathcal{G}_2}).$$

Pokażemy teraz, że odwzorowanie φ jest ciągłe.

Niech $\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)$ będzie otoczeniem jedności w grupie $\hat{\mathcal{G}}_1$, gdzie $\mathcal{K}$ jest zbiorem zwartym w $\mathcal{G}_1$, a $\varepsilon > 0$.

Odwzorowanie f jest homomorfizmem topologicznym, w szczególności jest więc ciągłe, zatem $f(\mathcal{K})$ jest zbiorem zwartym w $\mathcal{G}_2$.

Weźmy otoczenie jedności $\mathcal{U}(f(\mathcal{K}), \varepsilon)$ w grupie $\mathcal{G}_2$ i dowolny charakter χ tej grupy należący do tego otoczenia oraz dowolne $x \in \mathcal{K}$, wtedy

$$|(\varphi(\chi))(x) - 1| = |(\chi \circ f)(x) - 1| = |\chi(f(x)) - 1| < \varepsilon.$$

Zatem $\varphi(\mathcal{U}(f(\mathcal{K}), \varepsilon)) \subset \mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)$, tak więc odwzorowanie φ jest ciągłe. $\square$

Definicja 2.1

Dla niepustego podzbioru $\mathcal{H}$ grupy $\mathcal{G}$ określamy *anihilator* $\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$ zbioru $\mathcal{H}$ w $\hat{\mathcal{G}}$ jako

$$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; \forall_{x \in \mathcal{H}} \chi(x) = 1\}.$$

Lemat 2.6

$$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}}).$$

Dowód:

$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) \supset \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}})$: Oczywiście.

$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) \subset \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}})$: Weźmy dowolny $\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$, jako charakter grupy $\mathcal{G}$ jest on w szczególności funkcją ciągłą, zatem

$$\{1\} \subset \chi(\overline{\mathcal{H}}) \subset \overline{\chi(\mathcal{H})} = \overline{\{1\}} = \{1\},$$

czyli $\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}})$. $\square$

Lemat 2.7

Anihilator zbioru $\mathcal{H}$ jest domkniętą podgrupą grupy $\hat{\mathcal{G}}$.

Dowód:

Założmy, że $\chi \notin \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$. Wtedy $\exists_{x \in \mathcal{H}} |\chi(x) - 1| = \varepsilon > 0$. Wówczas

$$\chi \cdot \mathcal{U}(\{x\}, \frac{\varepsilon}{3}) \cap \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) = \emptyset,$$

więc $\hat{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$ jest zbiorem otwartym, co daje nam tezę. $\square$

Uwaga 2.1

$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{G}) = \{\chi_e\}$, gdzie χ_e to charakter trywialny grupy $\mathcal{G}$, gdyż

$$\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{G}) = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; \forall_{x \in \mathcal{G}} \chi(x) = 1\} = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}; \chi = \chi_e\} = \{\chi_e\}.$$

Lemat 2.8

Niech $f : \mathcal{G}_1 \mapsto \mathcal{G}_2$ będzie homomorfizmem topologicznym grupy $\mathcal{G}_1$ w grupę $\mathcal{G}_2$, φ zaś homomorfizmem sprzężonym do f , wtedy

$$\ker \varphi = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}_2, f(\mathcal{G}_1)).$$

Dowód:

Niech $\chi_e^{\mathcal{G}_1}$ będzie charakterem trywialnym grupy $\mathcal{G}_1$,

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}_2; \varphi(\chi) = \chi_e^{\mathcal{G}_1}\} = \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}_2; \forall_{x \in \mathcal{G}_1} (\chi \circ f)(x) = 1\} = \\ &= \{\chi \in \hat{\mathcal{G}}_2; \forall_{y \in f(\mathcal{G}_1)} \chi(y) = 1\} = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}_2, f(\mathcal{G}_1)). \end{aligned}$$

 $\square$ **Twierdzenie 2.9**

Niech $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ będą grupami topologicznymi lokalnie zwartymi, wtedy

$$\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2 \Rightarrow \hat{\mathcal{G}}_1 \cong \hat{\mathcal{G}}_2.$$

Dowód:

Niech $f : \mathcal{G}_1 \mapsto \mathcal{G}_2$ ustala izomorfizm topologiczny grup $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$, pokażemy że φ będący homomorfizmem sprzężonym do f ustala izomorfizm między grupami $\hat{\mathcal{G}}_2$ i $\hat{\mathcal{G}}_1$. Z poprzednich lematów wiemy już że φ jest homomorfizmem topologicznym, wystarczy zatem pokazać, że:

- φ jest odwzorowaniem różnowartościowym

Wiemy, że f jako izomorfizm grupowy jest odwzorowaniem "na", czyli $f(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$, zatem $\ker \varphi = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}_2, f(\mathcal{G}_1)) = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}_2, \mathcal{G}_2) = \{\chi_e^{\mathcal{G}_2}\}$, gdzie $\chi_e^{\mathcal{G}_2}$ jest charakterem trywialnym grupy $\mathcal{G}_2$, a stąd już mamy różnowartościowość φ .

- φ jest odwzorowaniem "na"

Weźmy dowolny charakter $\chi^{\mathcal{G}_1}$ grupy $\mathcal{G}_1$. Odwzorowanie f jest izomorfizmem topologicznym, zatem również odwzorowanie f^{-1} jest izomorfizmem topologicznym. Połóżmy: $\sigma^{\mathcal{G}_2} = \chi^{\mathcal{G}_1} \circ f^{-1}$, $\sigma^{\mathcal{G}_2}$ jest oczywiście homomorfizmem ciągłym jako złożenie dwóch homomorfizmów ciągłych, ponadto $\sigma^{\mathcal{G}_2} : \mathcal{G}_2 \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\chi^{\mathcal{G}_1}} \mathbb{T}$, zatem $\sigma^{\mathcal{G}_2}$ jest charakterem grupy $\mathcal{G}_2$. W końcu $\varphi(\sigma^{\mathcal{G}_2}) = \sigma^{\mathcal{G}_2} \circ f = (\chi^{\mathcal{G}_1} \circ f^{-1}) \circ f = \chi^{\mathcal{G}_1}$.

- φ^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym

Wiemy, że f jest izomorfizmem topologicznym, zatem f^{-1} jest homomorfizmem topologicznym, co biorąc pod uwagę lemat 2.5 prowadzi nas do wniosku, że φ^{-1} jest homomorfizmem topologicznym, co w szczególności daje nam ciągłość φ^{-1} .

□

Lemat 2.10

Niech $\mathcal{H}$ będzie domkniętą podgrupą grupy topologicznej $\mathcal{G}$. Wówczas

$$\widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \cong \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}).$$

Dowód:

Określamy $\lambda : \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) \subset \hat{\mathcal{G}}$, w następujący sposób: $\lambda(\chi) = \chi \circ \varphi_{\mathcal{H}}$, gdzie $\varphi_{\mathcal{H}}$ jest homomorfizmem kanonicznym grupy $\mathcal{G}$ na grupę $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

- λ jest poprawnie określony

Weźmy dowolny $\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ i $g \in \mathcal{H}$.

$$(\lambda(\chi))(g) = (\chi \circ \varphi_{\mathcal{H}})(g) = \chi(g \cdot \mathcal{H}) = \chi(\mathcal{H}) = 1.$$

Zatem $(\lambda(\chi))(\mathcal{H}) = 1$, czyli $\lambda(\chi) \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$.

- λ jest homomorfizmem

Weźmy dowolne $g \in \mathcal{G}$, niech χ_e oznacza charakter trywialny grupy $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Wówczas

$$(\lambda(\chi_e))(g) = (\chi_e \circ \varphi_{\mathcal{H}})(g) = \chi_e(g \cdot \mathcal{H}) = 1.$$

Weźmy dowolne $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$. Otrzymujemy

$$\lambda(\chi_1 \cdot \chi_2) = (\chi_1 \cdot \chi_2) \circ \varphi_{\mathcal{H}} = (\chi_1 \circ \varphi_{\mathcal{H}}) \cdot (\chi_2 \circ \varphi_{\mathcal{H}}) = \lambda(\chi_1) \cdot \lambda(\chi_2).$$

- λ jest 1-1

Niech $\chi_e^{\mathcal{G}}$ oznacza charakter trywialny grupy $\mathcal{G}$. Zatem

$$\ker \lambda = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \lambda(\chi) = \chi_e^{\mathcal{G}}\} = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{G}} (\lambda(\chi))(g) = 1\} =$$

$$\{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{G}} (\chi \circ \varphi_{\mathcal{H}})(g) = 1\} = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{G}} \chi(g \cdot \mathcal{H}) = 1\} = \{\chi_e^{\mathcal{G}/\mathcal{H}}\}.$$

- λ jest "na"

Weźmy dowolne $\chi \in \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$, wskażemy bezpośrednio taki charakter

$\beta \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$, że $\lambda(\beta) = \chi$. Określamy β w następujący sposób:

$$\forall_{g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}} \beta(g \cdot \mathcal{H}) = \chi(g).$$

Sprawdźmy, że β jest poprawnie określoną funkcją. W tym celu weźmy

takie $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, że $g_1 \cdot \mathcal{H} = g_2 \cdot \mathcal{H}$, a zatem $\exists_{h \in \mathcal{H}} g_1 \cdot h = g_2$. Wówczas

$$\beta(g_2 \cdot \mathcal{H}) = \chi(g_2) = \chi(g_1 \cdot h) = \chi(g_1) \cdot \chi(h) = \chi(g_1) = \beta(g_1 \cdot \mathcal{H}).$$

Pokażemy, że β jest homomorfizmem. Rzeczywiście

$$\beta(\mathcal{H}) = \beta(e \cdot \mathcal{H}) = \chi(e) = 1$$

i jeśli $g_1 \cdot \mathcal{H}, g_2 \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, to

$$\beta(g_1 \cdot \mathcal{H} * g_2 \cdot \mathcal{H}) = \beta((g_1 \cdot g_2) \cdot \mathcal{H}) = \chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \beta(g_1 \cdot \mathcal{H}) \cdot \beta(g_2 \cdot \mathcal{H}).$$

Pozostaje do sprawdzenia, że β jest homomorfizmem ciągłym.

Weźmy w tym celu dowolny zbiór otwarty $\mathcal{U} \subset \mathbb{T}$. Wtedy

$$\beta^{-1}(\mathcal{U}) = \{g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}; \beta(g \cdot \mathcal{H}) \in \mathcal{U}\} = \{g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}; \chi(g) \in \mathcal{U}\}$$

$$= \{g \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}; g \in \chi^{-1}(\mathcal{U})\} = \phi_{\mathcal{H}}(\chi^{-1}(\mathcal{U})).$$

Ponieważ χ jest homomorfizmem ciągłym, więc $\chi^{-1}(\mathcal{U})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}$, $\phi_{\mathcal{H}}$ zaś odwzorowaniem otwartym tak więc ostatecznie $\beta^{-1}(\mathcal{U})$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, a więc β jest ciągłe.

Ostatecznie więc pokazaliśmy, że β jest charakterem $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, jednocześnie

$$\forall_{g \in \mathcal{G}} (\lambda(\beta))(g) = (\beta \circ \phi_{\mathcal{H}})(g) = \beta(g \cdot \mathcal{H}) = \chi(g).$$

Tak więc λ jest funkcją "na".

- Pokażemy teraz ciągłość odwzorowania λ . Weźmy dowolny zbiór $\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon) \cap \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$ otwarty w $\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$, gdzie $\mathcal{K}$ jest zwartym podzbiorem $\mathcal{G}$, a $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon) \cap \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})) &= \lambda^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)) \cap \lambda^{-1}(\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})) = \lambda^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)) \cap \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = \\ &= \lambda^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)) = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \lambda(\chi) \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, \varepsilon)\} = \\ &= \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{K}} |(\lambda(\chi))(g) - 1| < \varepsilon\} = \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{K}} |((\chi \circ \phi_{\mathcal{H}}))(g) - 1| < \varepsilon\} = \\ &= \{\chi \in \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}; \forall_{g \in \mathcal{K}} |\chi(g \cdot \mathcal{H}) - 1| < \varepsilon\} = \mathcal{U}(\phi_{\mathcal{H}}(\mathcal{K}), \varepsilon). \end{aligned}$$

Ciągły obraz zbioru zwartego jest zbiorem zwartym, tak więc $\phi_{\mathcal{H}}(\mathcal{K})$ jest zwartym podzbiorem $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, a dzięki temu $\mathcal{U}(\phi_{\mathcal{H}}(\mathcal{K}), \varepsilon)$ jest otwartym podzbiorem $\widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$. Zatem ostatecznie λ jest ciągła.

□

Lemat 2.11

Niech $\mathcal{H}$ będzie domkniętą podgrupą zwartej, abelowej grupy $\mathcal{G}$, wtedy

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})).$$

Dowód:

Pomyślmy najpierw nad tym, co tak naprawdę oznacza zapis $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))$. Otóż

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})) = \{x \in \mathcal{G}; \forall_{\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})} \hat{x}(\chi) = 1\} =$$

$$\{x \in \mathcal{G}; \quad \forall_{\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})} \chi(x) = 1\} = \bigcap_{\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})} \chi^{-1}(1).$$

Weźmy teraz dowolne $x \in \mathcal{H}$, dla dowolnego $\chi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$ wprost z definicji anihilatora mamy $\chi(x) = 1$, zatem $x \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))$, pokazaliśmy więc, że $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))$.

Zajmijmy się teraz zawieraniem odwrotnym, załóżmy że ono nie zachodzi, tzn., że $\exists_{x \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))} x \notin \mathcal{H}$.

Tak więc $x \notin \mathcal{H}$, ale stąd wynika od razu że $x \cdot \mathcal{H} \neq e_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ i oczywiście możemy znaleźć taki charakter ψ grupy $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, że $\psi(x \cdot \mathcal{H}) \neq 1$.

Wiemy jednak z poprzednich lematów, że $\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}) \cong \widehat{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$, zatem $\psi \in \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})$, co implikuje

$$\psi(x \cdot \mathcal{H}) = \psi(x) = \hat{x}(\psi).$$

Otrzymujemy więc ostatecznie, że $\hat{x}(\psi) \neq 1$ co przeczy temu, że $x \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))$.

□

Lemat 2.12

Niech $\mathcal{H}$ będzie domkniętą podgrupą grupy topologicznej $\mathcal{G}$. Wówczas

$$\hat{\mathcal{H}} \cong \hat{\mathcal{G}}/\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}).$$

Dowód:

Stosując kolejno lemat 2.10, twierdzenia Pontriagina o dualności (tw. 2.4) oraz lemat 2.11 otrzymujemy

$$(\hat{\mathcal{G}}/\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))^\wedge \cong \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})) \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H})) = \mathcal{H}$$

Teraz z twierdzenia 2.9 i twierdzenia 2.4 otrzymujemy tezę

$$\hat{\mathcal{H}} \cong (\hat{\mathcal{G}}/\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}))^\sim \cong \hat{\mathcal{G}}/\mathcal{A}(\hat{\mathcal{G}}, \mathcal{H}).$$

□

Rozdział 3

Własności ciągów równomiernie rozłożonych

Rozdział ten będzie poświęcony podstawowym własnościom ciągów równomiernie rozłożonych. Przypomnijmy jeszcze na wstępie, że o ciągu (x_n) elementów przestrzeni topologicznej $\mathcal{G}$ mówimy, że zbiega on do $c \in \mathcal{G}$, jeśli

$$\forall_{\substack{\mathcal{U} \ni c \\ \text{otwarty}}} \exists N \forall_{n \geq N} x_n \in \mathcal{U}.$$

Przykład 3.1

Najprostszym przykładem ciągu, który nie jest równomiernie rozłożony jest ciąg stały. Niech (x_n) będzie takim ciągiem, tzn. $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_0$, gdzie x_0 jest ustalonym elementem grupy topologicznej $\mathcal{G}$, zaś χ będzie dowolnym nietrywialnym charakterem grupy $\mathcal{G}$. Wówczas

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_n) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_0) \right| = |\chi(x_0)| = 1$$

Tak więc w ewidentny sposób

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_n) \neq 0$$

(oczywiście zakładamy, że $\mathcal{G}$ ma co najmniej dwa elementy).

Przykład 3.2

Weźmy grupę cykliczną $\mathcal{C}_m$, $m > 1$, z przykładu 1.2, oznaczmy przez a generator tej grupy i rozpatrzmy ciąg postaci $x_n := a^n$. Niech $\chi_h \in \widehat{\mathcal{C}_m}$. Zgodnie z

przykładem 1.3 jest on postaci

$$\chi_h(a^k) = \exp(2\pi i \cdot \frac{h}{m}k),$$

co prowadzi nas do równości

$$|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_h(x_k)| = |\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_h(a^k)| = |\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(2\pi i \cdot \frac{h}{m}k)|.$$

Istnieją takie $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{N}$, że $N = qm + r$, stąd otrzymujemy (posługując się 4.2)

$$|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_h(x_k)| = |\frac{1}{N} \sum_{k=1}^r \exp(2\pi i \cdot \frac{h}{m}k)| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^r |\exp(2\pi i \cdot \frac{h}{m}k)| \leq \frac{r}{N},$$

co zbiega do 0 przy $N \mapsto \infty$. Zatem ciąg kolejnych potęg generatora $\mathcal{C}_m$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{C}_m$, a jak pokaże nam twierdzenie 3.2 jest on również doskonale rozłożony.

Twierdzenie 3.1

Niech $(x_n) \subset \mathcal{G}$ będzie ciągiem doskonale rozłożonym na $\mathcal{G}$, $(c_n) \subset \mathcal{G}$ zaś dowolnym zbieżnym ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$. Wtedy ciąg $(c_n \cdot x_n)$ elementów grupy $\mathcal{G}$ jest również doskonale rozłożony w $\mathcal{G}$.

Dowód:

Do dowodu tego twierdzenia wykorzystamy kryterium Weyla (wniosek 1.4.2). Niech $\varepsilon > 0, h \in \mathbb{N}$ a χ będzie dowolnym nietrywialnym charakterem $\mathcal{G}$. Połóżmy $c = \lim c_n$.

$$\begin{aligned} |\frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n \cdot c_n)| &= |\frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} (\chi(x_n \cdot c_n) - \chi(x_n) \cdot \chi(c) + \chi(x_n) \cdot \chi(c))| = \\ &= |\frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} (\chi(x_n) \cdot \chi(c_n) - \chi(x_n) \cdot \chi(c)) + \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n) \cdot \chi(c)| \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} |\chi(x_n)(\chi(c_n) - \chi(c))| + |\frac{\chi(c)}{N} \sum_{n=1+h}^N \chi(x_n)| = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} |\chi(x_n)| \cdot |\chi(c_n) - \chi(c)| + |\chi(c)| \cdot |\frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n)| = \rho \end{aligned}$$

Oczywiście biorąc pod uwagę to, że $\chi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{T}$ otrzymujemy natychmiast

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} |\chi(c_n) - \chi(c)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n) \right|.$$

Wiemy z założeń, że χ jest homomorfizmem ciągłym, a $c_n \mapsto c$, gdy $n \mapsto \infty$, zatem dla danego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć takie n_0 , że $\forall_{n \geq n_0} |\chi(c_n) - \chi(c)| < \frac{\varepsilon}{4}$, co natychmiast daje nam oszacowanie na pierwszy składnik naszej sumy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} |\chi(c_n) - \chi(c)| &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1+h}^{n_0} |\chi(c_n) - \chi(c)| + \sum_{n=n_0+1}^{N+h} |\chi(c_n) - \chi(c)| \right) < \\ &< \frac{2 \cdot n_0}{N} + \frac{N}{N} \cdot \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Zatem dla dostatecznie dużych N

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} |\chi(c_n) - \chi(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kwestia drugiego składnika jest rozstrzygnięta dzięki założeniu doskonałego rozłożenia ciągu (x_n) , albowiem z kryterium Weyla natychmiast otrzymujemy, że

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla dostatecznie dużych N . Ostatecznie pokazaliśmy, że

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(x_n \cdot c_n) \right| < \varepsilon.$$

□

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy natychmiast dla ciągu stałego o elementach równych ustalonemu $c \in \mathcal{G}$

Wniosek 3.1.1

Niech $(x_n) \subset \mathcal{G}$ będzie doskonale rozłożonym ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$. Wtedy ciąg $(c \cdot x_n)$ jest ciągiem doskonale rozłożonym w $\mathcal{G}$.

□

Wniosek 3.1.2

Niech (x_n) będzie ciągiem doskonale rozłożonym w grupie $\mathcal{G}$, (y_n) zaś dowolnym ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$.

Jeśli tylko ciąg $(x_n^{-1} \cdot y_n)$ zbiega, to również ciąg (y_n) jest doskonale rozłożony w $\mathcal{G}$.

Dowód:

Położmy $c_n = x_n^{-1} \cdot y_n$, wiemy z naszych założeń, że (c_n) zbiega, (x_n) zaś jest doskonale rozłożony, zatem z powyższych rozważań otrzymujemy natychmiast, że $(x_n \cdot c_n)$ jest doskonale rozłożony, ale $(x_n \cdot c_n) = (x_n \cdot x_n^{-1} \cdot y_n) = (y_n)$ $\square$

W szczególnym przypadku, gdy rozpatrujemy ciągi równomiernie rozłożone elementów grupy $\mathcal{G}$, otrzymujemy natychmiast z dowodów powyższych twierdzeń następujące trzy wnioski:

Wniosek 3.1.3

Niech $(x_n) \subset \mathcal{G}$ będzie ciągiem równomiernie rozłożonym w $\mathcal{G}$, $(c_n) \subset \mathcal{G}$ zaś dowolnym zbieżnym ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$. Wtedy ciąg $(c_n \cdot x_n)$ elementów grupy $\mathcal{G}$ jest również równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. $\square$

Wniosek 3.1.4

Niech $(x_n) \subset \mathcal{G}$ będzie równomiernie rozłożonym ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$. Wtedy dla dowolnego, ustalonego elementu tej grupy $c \in \mathcal{G}$ ciąg $(c \cdot x_n)$ jest ciągiem równomiernie rozłożonym w $\mathcal{G}$. $\square$

Wniosek 3.1.5

Niech (x_n) będzie ciągiem równomiernie rozłożonym w grupie $\mathcal{G}$.

Jeśli tylko ciąg $(x_n^{-1} \cdot y_n)$ zbiega, to również ciąg (y_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. $\square$

Bardzo ciekawy rezultat otrzymujemy dla ciągów postaci (a^n) , a mianowicie:

Twierdzenie 3.2

Jeśli dla pewnego $a \in \mathcal{G}$, ciąg (a^n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$, to ciąg (a^n) jest nawet doskonale rozłożony w $\mathcal{G}$.

Dowód:

W dowodzie wykorzystamy kryterium Weyla (wniosek 1.4.2), pokazując że dla dowolnego $h \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(a^n) = 0$$

jednostajnie względem h .

Niech $\varepsilon > 0$, $h \in \mathbb{N}$, χ dowolny nietrywialny charakter grupy $\mathcal{G}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1+h}^{N+h} \chi(a^n) \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(a^{n+h}) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(a^n) \cdot \chi(a^h) \right| \\ &= |\chi(a^h)| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(a^n) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(a^n) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

dla N dostatecznie dużych, bo ciąg (a^n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. $\square$

Twierdzenie 3.3

Niech ϕ będzie ciągłym homomorfizmem grupy $\mathcal{G}$ na grupę $\mathcal{G}_1$, wtedy dla dowolnego równomiernie rozłożonego ciągu (x_n) elementów grupy $\mathcal{G}$, ciąg $(\phi(x_n))$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}_1$.

Dowód:

Weźmy dowolny nietrywialny charakter χ grupy $\mathcal{G}_1$. Musimy pokazać, że zachodzi równość

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\phi(x_n)).$$

Zwróćmy jednak uwagę że złożenie $\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$ jest ciągłym homomorfizmem grupy $\mathcal{G}$ w $\mathbb{C}$, zatem jest charakterem grupy $\mathcal{G}$, a dzięki założeniu że ϕ jest "na" mamy również jego nietrywialność, zatem natychmiast z założenia o równomiernym rozkładzie ciągu (x_n) wynika potrzebna nam równość. $\square$

Uwaga 3.1

Oczywiście jeśli ϕ w powyższym twierdzeniu nie jest "na", to ciąg $(\phi(x_n))$ jest równomiernie rozłożony tylko w $\phi(\mathcal{G})$ ($\phi(\mathcal{G})$ jest grupą topologiczną z topologią indukowaną z $\mathcal{G}_1$).

W szczególności każdy ciągły endomorfizm grupowy "na" zachowuje równomierny rozkład ciągów, tzn.

Wniosek 3.3.1

Jeśli $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ jest ciągłym endomorfizmem "na" oraz (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$, to $(\varphi(x_n))$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. $\square$

Mocniejszy warunek otrzymujemy dla automorfizmów:

Wniosek 3.3.2

Jeśli $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ jest ciągłym automorfizmem, to (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\varphi(x_n))$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. $\square$

Wniosek 3.3.3

(x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow (x_n^{-1})$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$

Dowód:

Wystarczy zauważyć że $(\cdot)^{-1} : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ jest ciągłym automorfizmem $\mathcal{G}$, dzięki czemu natychmiast otrzymujemy tezę wykorzystując poprzedni wniosek. $\square$

Wniosek 3.3.4

Niech $\mathcal{H}$ będzie dowolną domkniętą podgrupą grupy $\mathcal{G}$, zaś ciąg (x_n) będzie równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$. Wtedy ciąg $(x_n \cdot \mathcal{H})$ jest równomiernie rozłożony w grupie ilorazowej $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Dowód:

Otrzymujemy natychmiast z tw 3.3 zastosowanego do homomorfizmu kanonicznego $\phi_{\mathcal{H}} : x \mapsto x \cdot \mathcal{H}$. $\square$

Rozdział 4

Uogólnione twierdzenie Van der Corputa

Klasyczne twierdzenie Van der Corputa stanowi, że jeśli $(z_n) \subset \mathbb{T}$ oraz $(z_{n+h} \cdot \overline{z_n})$ jest równomiernie rozłożony (na $\mathbb{T}$) dla dowolnego $h \in \mathbb{N}$, to i (z_n) jest równomiernie rozłożony na $\mathbb{T}$. W tym rozdziale uogólnimy to twierdzenie na przypadek dowolnej grupy abelowej, zwartej $\mathcal{G}$.

Niech $n \in \mathbb{N}$, będzie ustaloną liczbą naturalną, przez $z_k \in \mathbb{C}$ oznaczmy k -ty pierwiastek n -tego stopnia z 1, gdzie $0 \leq k < n - 1$, tzn.

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad (4.1)$$

oraz dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^p = 0, \quad (4.2)$$

bo oznaczając $\alpha = z_1$ i pamiętając, że $\alpha^n = 1$ otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^p = 1^p + \alpha^p + \alpha^{2p} + \dots + \alpha^{p(n-1)} = \frac{1 - \alpha^{pn}}{1 - \alpha} = \frac{1 - (\alpha^n)^p}{1 - \alpha} = 0.$$

Lemat 4.1

Niech x_i , $i = 1, \dots, N$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych, zaś $1 \leq H \leq N$. Wówczas

$$H^2 \cdot \left| \sum_{i=1}^N x_i \right|^2 \leq H \cdot (N+H-1) \cdot \sum_{i=1}^N |x_i|^2 + 2 \cdot (N+H-1) \cdot \sum_{h=1}^H (H-h) \cdot \left| \sum_{j=1}^{N-h} x_j \cdot \overline{x_{j+h}} \right|$$

Dowód:

Zauważmy najpierw, że

$$H \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N H x_i = \sum_{i=1}^N \sum_{h=0}^{H-1} x_i.$$

Kładziemy $p = i + h$, wtedy $1 \leq p \leq N + H - 1$, oraz kładąc $x_i = 0$, dla wszystkich $i \leq 0$ oraz $i > N$, otrzymujemy

$$H \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h}.$$

Korzystając z nierówności Schwartza otrzymujemy

$$\begin{aligned} H^2 \left| \sum_{i=1}^N x_i \right|^2 &= \left| \sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h} \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{N+H-1} 1^2 \cdot \sum_{p=1}^{N+H-1} \left| \sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h} \right|^2 = \\ &= (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \left| \sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h} \right|^2 = (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \left(\sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h} \cdot \overline{\sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h}} \right) = \\ &= (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \left(\sum_{h=0}^{H-1} x_{p-h} \cdot \sum_{h=0}^{H-1} \overline{x_{p-h}} \right) = \\ &= (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{r,s=0}^{H-1} x_{p-r} \cdot \overline{x_{p-s}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Przy ustalonym $1 < i \leq N$ liczba członów $x_i \cdot \overline{x_i}$ wchodzących w skład sumy 4.3 wynosi dokładnie H , co daje nam nierówność

$$\begin{aligned} H^2 \left| \sum_{i=1}^N x_i \right|^2 &\leq H(N+H-1) \sum_{i=1}^N |x_i|^2 + (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{\substack{r,s=0 \\ r \neq s}}^{H-1} x_{p-r} \cdot \overline{x_{p-s}} = \\ &= H(N+H-1) \sum_{i=1}^N |x_i|^2 + (N+H-1) \sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{\substack{r,s=0 \\ s < r}}^{H-1} (x_{p-r} \cdot \overline{x_{p-s}} + x_{p-s} \cdot \overline{x_{p-r}}). \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, co pozwala nam przekształcić naszą nierówność do postaci

$$H^2 \left| \sum_{i=1}^N x_i \right|^2 \leq H(N+H-1) \sum_{i=1}^N |x_i|^2 + 2(N+H-1) \Re \left[\sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{\substack{r,s=0 \\ s < r}}^{H-1} x_{p-r} \cdot \overline{x_{p-s}} \right]$$

Dla ustalonego $h, 1 \leq h \leq H-1$ oraz $j, 1 \leq j \leq N-h$, liczba członów $x_j \cdot \overline{x_{j+h}}$ wchodzących w skład prawego składnika sumy wynosi $H-h$, co pozwala nam zapisać

$$\Re\left[\sum_{p=1}^{N+H-1} \sum_{\substack{r,s=0 \\ s < r}}^{H-1} x_{p-r} \cdot \overline{x_{p-s}}\right] = \Re\left[\sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \sum_{j=1}^{N-h} x_j \cdot \overline{x_{j+h}}\right] = \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \Re\left[\sum_{j=1}^{N-h} x_j \cdot \overline{x_{j+h}}\right].$$

Biorąc pod uwagę, że dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $\Re(z) < |z|$ otrzymujemy tezę. $\square$

Twierdzenie 4.2

Niech (x_n) będzie ciągiem elementów grupy $\mathcal{G}$ spełniającym warunek

$$\forall_{h=1,2,\dots} \text{ciąg } (x_{n+h} \cdot x_n^{-1}) \text{ jest równomiernie rozłożony w } \mathcal{G}.$$

Wtedy, dla dowolnego całkowitego q i każdego $0 \leq r < |q|$ ciąg $(x_{q \cdot n + r})$ jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$, w szczególności również sam ciąg (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$.

Dowód:

Niech q i r będą ustalone, χ zaś będzie dowolnym nietrywialnym charakterem grupy topologicznej $\mathcal{G}$. W dowodzie twierdzenia posłużymy się kryterium Weyla (wniosek 1.4.1). Zauważmy najpierw, że

$$\sum_{n=1}^N \chi(x_{q \cdot n + r}) = \chi(x_{q+r}) + \chi(x_{2 \cdot q + r}) + \dots + \chi(x_{N \cdot q + r}) = \sum_{s=1}^{q \cdot N} \alpha(s) \cdot \chi(x_{s+r}),$$

jeśli tylko tak określimy $\alpha = \alpha(s) \in \mathbb{C}$, że dla $s \equiv 0 \pmod{q}$ przyjmie ono wartość 1, a dla pozostałych s wartość 0. Przyjmijmy

$$\alpha(s) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \exp(2\pi i \cdot \frac{j \cdot s}{q}).$$

Sprawdźmy, że α ma rzeczywiście takie własności jakich potrzebujemy.

$$1. \ s \equiv 0 \pmod{q} \Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{Z}} s = m \cdot q, \text{ wtedy}$$

$$\alpha = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \exp(2\pi i j m) = \frac{1}{q} \cdot q = 1.$$

2. $s \not\equiv 0 \pmod{q} \Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}}$ takie, że $0 < p < q - 1$ i $s = m \cdot q + p$, wtedy zgodnie z 4.2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \exp(2\pi i \frac{j}{q}(mq + p)) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \exp(2\pi i jm) \cdot \exp(2\pi i \frac{jp}{q}) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \left(\exp(2\pi i \frac{j}{q}) \right)^p = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q z_j^p = 0. \end{aligned}$$

Możemy zatem zapisać

$$\sum_{n=1}^N \chi(x_{q \cdot N+r}) = \sum_{s=1}^{q \cdot N} \alpha(s) \cdot \chi(x_{s+r}), = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r})$$

Oszacujmy teraz moduł

$$\left| \sum_{n=1}^N \chi(x_{q \cdot N+r}) \right| = \left| \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right| \leq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \left| \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|.$$

A ponieważ średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest nie większa niż maximum z wszystkich tych liczb, więc otrzymujemy

$$\left| \sum_{n=1}^N \chi(x_{q \cdot N+r}) \right| \leq \max_{j=1, \dots, q} \left| \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|. \quad (4.4)$$

Niech teraz $1 \leq H \leq qN$, wtedy z lematu 4.1

$$\begin{aligned} H^2 \left| \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|^2 &\leq H(qN + H - 1) \sum_{s=1}^{qN} \left| \chi(x_{s+r}) \right|^2 + \\ &+ 2(qN + H - 1) \sum_{h=1}^{H-1} (H - h) \left| \Sigma_h \right|, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Sigma_h &= \sum_{p=1}^{qN-h} \exp(2\pi i \frac{j}{q}p) \cdot \chi(x_{p+r}) \cdot \overline{\exp(2\pi i \frac{j}{q}(p+h)) \cdot \chi(x_{p+r+h})} \\ &= \sum_{p=1}^{qN-h} \exp(2\pi i \frac{j}{q}(p-p-h)) \cdot \chi(x_{p+r} \cdot x_{p+r+h}^{-1}) = \exp(-2\pi i \frac{jh}{q}) \cdot \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+h+r} \cdot x_{p+r}^{-1}) \end{aligned}$$

Co daje nam oszacowanie

$$\left| \Sigma_h \right| \leq \left| \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+h+r} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right|,$$

dzięki któremu uzyskujemy

$$H^2 \left| \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|^2 \leq H(qN + H - 1) \sum_{s=1}^{qN} \left| \chi(x_{s+r}) \right|^2 +$$

$$+ 2(qN + H - 1) \sum_{h=1}^{H-1} (H - h) \left| \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+h+r} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right|.$$

Biorąc pod uwagę, że moduł dowolnego charakteru jest równy 1, otrzymujemy

$$H^2 \left| \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|^2 \leq H(qN + H - 1)qN +$$

$$+ 2(qN + H - 1) \sum_{h=1}^{H-1} (H - h) \left| \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+h+r} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right|,$$

co po podzieleniu obu stron nierówności przez $H^2 N^2$ daje nam

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right|^2 \leq$$

$$\frac{q(qN + H - 1)}{HN} + \frac{2(qN + H - 1)}{H^2 N} \cdot \sum_{h=1}^{H-1} \frac{H - h}{N} \left| \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+r+h} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right| \leq$$

$$\frac{q(qN + H - 1)}{HN} + \frac{2(qN + H - 1)}{H^2 N} \cdot \sum_{h=1}^{H-1} \frac{(H - h)(qN - h)}{N} \left| \frac{1}{qN - h} \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+r+h} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right| \leq$$

$$\frac{q(qN + H - 1)}{HN} + \frac{2(q + \frac{H-1}{N})}{H^2} \cdot \sum_{h=1}^{H-1} (H - h)(q - \frac{h}{N}) \left| \frac{1}{qN - h} \sum_{p=1}^{qN-h} \chi(x_{p+r+h} \cdot x_{p+r}^{-1}) \right|.$$

Zgodnie z naszym założeniem dotyczącym ciągu (x_n) drugi składnik dla $N \rightarrow \infty$ zbiega do zera, pierwszy zaś do $\frac{q^2}{H}$. Biorąc pod uwagę, że H może przyjmować dowolnie duże wartości otrzymujemy dla dowolnego $j = 1, \dots, q$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{qN} \exp(2\pi i \frac{js}{q}) \cdot \chi(x_{s+r}) \right| = 0,$$

co biorąc pod uwagę 4.4 prowadzi nas do wniosku, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_{qN+r}) \right| = 0.$$

□

Uwaga 4.1

W przypadku, gdy $\mathcal{G}$ jest dodatkowo spójna (a więc każdy nietrywialny charakter nie jest dyskretny), kryterium Weyla stanowi, że (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G} \Leftrightarrow$ dla każdego nietrywialnego charakteru $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$, $(\chi(x_n))$ jest równomiernie rozłożony w $\mathbb{T}$. Ponieważ

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_{n+h} \cdot x_n^{-1}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(x_{n+h}) \cdot \overline{\chi(x_n)}$$

więc inny (lecz niekrótszy) dowód twierdzenia 4.2 wynika z klasycznego dowodu twierdzenia Van der Corputa.

4.1 Twierdzenie Weyla

Definicja 4.1

Zwartą, abelową grupę topologiczną $\mathcal{G}$ nazywa się *monotetyczną*, gdy dla pewnego $a \in \mathcal{G}$ ciąg $\{a^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsty w $\mathcal{G}$. W takim przypadku mówi się, że a jest *cyklicznym generatorem* grupy $\mathcal{G}$.

Zauważmy, że a jest cyklicznym generatorem grupy $\mathcal{G} \Leftrightarrow \chi(a) \neq 1$ dla dowolnego nietrywialnego charakteru $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$.

Rzeczywiście, gdyby $\mathcal{H} = \overline{\{a^n ; n \in \mathbb{Z}\}}$ było różne od $\mathcal{G}$, to z lematu 2.10 znaleźlibysmy nietrywialny charakter $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$ spełniający $\chi|_{\mathcal{H}} = 1$, więc $\chi(a) = 1$. Z drugiej strony jeśli $\chi(a) = 1$, to $\chi(a^n) = 1$ i z ciągłości χ wnioskujemy, że χ jest charakterem trywialnym.

Lemat 4.3

Jeśli $\mathcal{G} = \overline{\{a^n ; n \in \mathbb{Z}\}}$ i $\mathcal{G}$ jest spójna, to dla dowolnego nietrywialnego charakteru $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$, $\chi(a)$ jest liczbą niewymierną (tzn. nie jest pierwiastkiem z 1).

Dowód:

$\chi(\mathcal{G})$ jest domkniętą i spójną podgrupą okręgu (tzn. $\chi(\mathcal{G}) = \mathbb{T}$), w której $\{\chi(a)^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsty. □

Ustalmy teraz $m \geq 1$ i niech $(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{G}^{m+1}$.

Twierdzenie 4.4 (twierdzenie Weyla)

Jeśli $\mathcal{G}$ jest spójna oraz $\exists_{1 \leq i \leq m} a_i$ jest cyklicznym generatorem grupy $\mathcal{G}$, to ciąg

$$b_n := a_m^{n^m} \cdot a_{m-1}^{n^{m-1}} \cdot \dots \cdot a_1^n \cdot a_0$$

jest równomiernie rozłożony w $\mathcal{G}$.

Dowód:

Niech $\chi \in \hat{\mathcal{G}}$ będzie nietrywialny i połóżmy $x_n = \chi(b_n)$. Jak już zauważyliśmy, wystarczy pokazać, że ciąg (x_n) jest równomiernie rozłożony w $\mathbb{T}$. Utożsamiając $\mathbb{T}$ z $[0, 1)$ (na $[0, 1)$ rozpatrujemy dodawanie mod 1) nasz ciąg (x_n) może być zapisany w postaci

$$x_n = n^m \chi(a_m) + n^{m-1} \chi(a_{m-1}) + \dots + n \chi(a_1) + \chi(a_0)$$

tzn., w postaci $x_n = P(n)$, gdzie $P(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, $b_i = \chi(a_i)$, $i = 0, \dots, m$. Ponadto, na mocy lematu 4.3, dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$, b_i jest liczbą niewymierną.

Założmy najpierw, że b_1 jest liczbą niewymierną, a $b_2, \dots, b_m$ są wymierne. Napiszmy

$$P(x) = Q(x) + b_1 x + b_0.$$

Niech c będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników liczb $b_2, \dots, b_m$. Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$

$$Q(ck + r) = Q(r) + M_k$$

dla pewnego $M_k \in \mathbb{Z}$. Zatem dla dowolnego $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i h P(n)) &= \frac{1}{N} \sum_{n=[\frac{N}{c}]c+1}^N \exp(2\pi i h P(n)) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^c \sum_{k=0}^{[\frac{N}{c}]-1} \exp(2\pi i h (Q(ck + j) + b_1(ck + j) + b_0)) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=[\frac{N}{c}]c+1}^N \exp(2\pi i h P(n)) + \sum_{j=1}^c \exp(2\pi i h (Q(j) + b_1 j + b_0)) \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[\frac{N}{c}]-1} \exp(2\pi i h b_1 ck) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \frac{N}{c} \rfloor c+1}^N \exp(2\pi i h P(n)) + \sum_{j=1}^c \exp(2\pi i h (Q(j) + b_1 j + b_0)) \cdot \frac{1}{N} \frac{\exp(2\pi i h b_1 c \lfloor \frac{N}{c} \rfloor) - 1}{\exp(2\pi i h b_1 c) - 1},$$

bo $b_1 c$ jest ciągle liczba niewymierna. Stąd w sposób oczywisty

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i h P(n)) = 0$$

przy uczynionych założeniach.

Dalsza część dowodu przebiega indukcyjnie; przy czym indukcja jest ze względu na najwyższą potęgę x^q , przy której stoi współczynnik niewymierny. Gdy $q = 1$, to twierdzenie zachodzi, jak to pokazaliśmy powyżej. Załóżmy więc, że $1 < q \leq m$. Weźmy dowolne $h \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że wielomian $P_h(x) := P(x+h) - P(x)$ ma tę własność, że jego największa potęga, przy której stoi współczynnik niewymierny, to x^{q-1} . Z założenia indukcyjnego, $(P_h(n))$ jest więc równomiernie rozłożony w $\mathbb{T}$, co wykorzystując twierdzenie 4.2 kończy dowód. $\square$

Bibliografia

- [1] R. Engelking, *Topologia Ogólna*, PWN, Warszawa 1976.
- [2] L.S. Pontriagin, *Grupy Topologiczne*, PWN, Warszawa.
- [3] P.R. Halmos, *Measure Theory*, D. van Nostrand Company, New York, 1950.
- [4] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, 1974.